# 2024 合同教研全道集会　４.数学教育分科会の報告

真鍋和弘（共同研究者）

## ０．はじめに

11 月 4 日（月）の午前中に開催された数学教育分科会には 10 名が参加した。小学校教員から元大学教員まで多様なメンバーが参加した。現職教員が少なかったのが悔やまれる。会場は合研事務局からほど近い札幌大通高校である。当初 online と現地参加のハイブリット形式を予定したが、機器(パソコン)の不調で online が使えなかった。レポートは次の 5 本で小学校から大学までバランスのとれたものだった。

| | |
|---|---|
| ⑴ 小学校 2 年生に分数は理解可能なのだろうか | （小学校） |
| ⑵ 分解等積と補充等積 | （小学校～大学） |
| ⑶ 中学校指導要領（数学 H29 告示）解説に対する違和感？ | （中学校～高校） |
| ⑷ 積分導入方法の比較 | （高校～大学） |
| ⑸ バカロレア 2024 年問題を見る | （大学入試） |

以下、それぞれのレポートについて私見を交えて簡単に報告する。なお共同研究者の成田収さんの報告を参考にした。＜道数協通信「こんぱす」2024.11.27 発行に掲載＞

## １．小学校 2 年生に分数は理解可能なのだろうか　　酒井義信

レポートのはじめに、酒井さんは小学２年生に分数を指導することに対して、以下のような３つの疑問点をあげている。

①指導要領では１年生で分離量として数を導入し、２年生から連続量をあつかい、連続量からも分数が抽象されるという説明がある。しかし実際の指導では、おはじきなどの分離量から分数が導入されている。これでは子どもが十分に理解できない。

②分数の意味として指導要領は５つをあげているが、２年生では「分数の意味が何か」ということが明示されていない。

③数学では系統的な指導が大切であるのに、指導要領では内容がバラバラで、その理由もしっかりと説明されていない。

小学２年生の指導要領では「1/2,1/3 など簡単な分数について知ること」となっている。しかし解説では、折り紙やロープなどの具体物の半分を 1/2 の大きさと言ったあとで、おはじきの図がでてくる。子どもが混乱することが述べられている。

各種の算数・数学教育研究団体においても、「分数を２つの連続量の割合として導入すべきか？、あるいは２つの自然数の比として導入すべきか？」という問題はいまでも議論が続いている。酒井さんは、3 年生で連続量の概念を子どもが認識した後で、４年生で分数を指

導することが自然だと述べている。また、また指導要領の背景には日本の藤沢力太郎以来の「数え主義」の伝統があることを指摘している。これは筆者も同感である。子どもにとって、丸いケーキの 1/3 と、おはじき３個中の１個が同じ 1/3 だとは到底思えないからである。

ここからは筆者の意見である。数学の歴史において分数（有理数）が果たしてきた役割は非常に大きいと言える。連続量の概念は古代ギリシャ時代からあったが、これを分数として表すことには抵抗があったようである。例えば$\sqrt{2}$を分数で表すことができないことは、その時代にすでに知られていた(注：$\sqrt{2}$ のような代数的無理数は連分数により表現できる)。

歴史的には、連続量を数として表すことは 16 世紀になって小数および指数と対数の完成により可能になったと考えられている。しかも、それらの起源はアラビアやインド(さらには中国)にあったと考えられている。日本でも 10 進法表記における「割、分、厘」に代表されるように、長く中国からの影響を強く受け、和算の文化が花開いたのである。小数とは、1/10, 1/100, 1/1000,…という分数の 1 次結合であるが、連続量を近似的に表す方法としてはたいへん優れていると思う。

日本の社会においては買い物などで分数を使う機会はほぼない。しかし若いころ筆者がヨーロッパやパキスタンを旅行したとき、商店のオジサンが流暢に紙に分数を書いて説明してくれたのを見て驚いた経験がある。最近では、インバウンドなどで海外の人が日本で買い物をすることが普通になった。日本で分数を使う機会が増えてくれば、分数が苦手な日本人が少なくなるかもしれない。

## ２．分解等積と補充等積　　氏家英夫

まず、このレポートが生まれた背景について触れておく。かつて氏家さんが「比較と測度の構成による面積概念の指導過程」や「ドンガバチョ村の水そうどう」を発表したときに、長方形の等積変形の手法として「分解等積」（分割等積ともいう）が使われていた。後で正確な定義を述べるが、「分解等積」とは直線で囲まれた図形を「裁ち合わせ」によって等積変形をすることである。しかし極端に底辺が長い長方形を底辺が短い長方形に等積変形するためには、極端に多数の等積変形を繰り返す必要がある。この手続きが終了することを保証するためには、実数の連続性の公理として知られている「アルキメデスの公理」を認めなければならない（これも後で定義を述べる）。これはヒルベルトが『幾何学の基礎』(1899)の中で述べている。また彼は「アルキメデスの公理」なしに等積変形を実行できる手法として「補充等積」をあげている。氏家さんはレポートの冒頭で次のように述べている。

*

私はいままで『ユークリッド原論』第１巻の最後「ピタゴラスの定理」の一つ前が「面積の標準化定理」（直線図形の面積は長さと同型ですべて比較可能である）ということはわかっていたが、その前なんかよくわからないことをしているなあ、と思っていた。先日、成田收氏による「補充等積による長方形の標準化法」(2024.3.2)で、大事なことはほとんどすべ

て言及されている。ここでは教育内容としての面積について考えてみたい。

＊

成田さんは「補充等積による長方形の標準化法」のはじめに次のように述べている。

＊

この「アルキメデスの公理」を回避して「標準化」を可能にするためには、分解等積ではなく、補充等積による「標準化」が重要であった。それが、可能であることを、ふと思いついたのである。かなり、驚いたのであるが、その手法は、あまりにも、自然で、わかってみれば当然と思われる内容であったため、これは、これまでにきっと多くの人々によって、すでに知られていることではないかと感じた。

ところが、そのことを氏家さんに伝えたところ、メールで『ユークリッド原論』の第１巻第 41 命題から 45 命題がそのことを議論していると教えていただいた。読んでみると、私が思いついたと思った議論は、ユークリッドによってほぼそのまま議論されていることがわかった。きっと誰かが議論している、とは思ったが、2300 年前のユークリッド幾何学の体系が成立したその瞬間にすでに議論されていたとは、恐れ入るばかりであった。

＊

レポートの詳しい内容は成田さん・氏家さんの両レポートを読んでほしい。おわりにレ—ポートのキーワードである「面積の標準化」「アルキメデスの公理」「分解等積」「補充等積」の定義をあげておく（記号や表現を多少変えてある）。

【面積の標準化】

直線で囲まれた２つの多角形の面積を比較するための方法。

① 多角形を三角形に分割する。
② 三角形の面積を変えずに、立ち合わせで半分の高さの長方形に変形する。
③ すべての長方形を、底辺が基準の長さの長方形に標準化する（ここで分解等積や補充等積などの手法が使われる）。
④ この標準化された長方形を積み上げ、高さを比較する。

これらの段階をすべて分解等積（裁ち合わせ）で行うことができる。これを授業プラン化したものが、氏家さんの「算数物語　ドンガバチョ村の水そうどう」である。

【アルキメデスの公理】（幾何学バージョン）

半線上の任意の２つの線分の長さを、それぞれＡＢ＝ｅ，ＣＤ＝ａとする。このとき、ある自然数ｎが存在して、ａ＜ｎｅとなる。

（筆者補注）

① アルキメデスの公理から極限の公式「$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$」がでる。

なぜなら、公理でｅ＝ε，ａ＝１とおくと、１に比べどんなに小さい数εに対しても

１＜ｎε となるｎが存在する。両辺をｎ（ｎ≠０）で割ると１/ｎ＜εとなるが、εは任意だったから、$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$である。 □

② アルキメデスの公理は、実数の連続性を表している。今回の成田さんのレポート「積分導入法の比較」で紹介されているロビンソンの超準解析の無限小実数 Δχ は実数体Ｒには含まれない。Δχ は超実数体Ｒ*である。Ｒ*はアルキメデスの公理を満たさない。つまり無限小実数にどんな大きな自然数ｎをかけても有限の実数とはならない。

【分解等積】

二つの単一多角形が互いに合同な有限個の三角形に分割されるとき、これらを分解等積という。

【補充等積】

二つの単一多角形ＰとＱに、互いに二つずつ分解等積な有限個の多角形：

$(p_1, q_1), (p_2, q_2), \cdots, (p_n, q_n)$を付け加えてできる両多角形

$$P + p_1 + p_2 + \cdots + p_n \text{と} Q + q_1 + q_2 + \cdots + q_n$$

が互いに分解等積であるとき、多角形ＰとＱは補充等積であるという。

分解等積は補充等積よりも強い条件である。言い換えると、二つの図形が補充等積ならば分解等積であるが逆はなりたたない。実際ヒルベルトは『幾何学の基礎』において、非アルキメデス幾何学で等高等底であり（したがって補充等積であるが）、分解等積ではない二つの三角形をつくってみせた。筆者はこの報告を書くことで、はじめてその違いを理解できた。

氏家さんは最後に、「成田氏のレポート（補充等積による長方形の標準化法）はとても簡単でわかりやすい。このレポートは補充等積による面積比較を教育内容として取り込むことを可能にしたのではないだろうか」と述べている。

すでに二人とも亡くなられたが、山口格・須田勝彦による「数学教育の観点から見たアルキメデスの公理」北大教育学部研究紀要（第 49 号）は数学教育における先駆的研究である。

## ３.中学校指導要領解説・数学編に対する違和感？　　　真鍋和弘

きっかけは「子どもと教科書全国ネット21」の機関誌に記載されていた浅間基秀さん（千葉県高校教員）による解説である。その中で引用されていた文科省の「中学校学習指導要領解説・数学編（H29 告示）」に違和感を覚えたからである。それは次の３点にまとめられる。

① 中学校１年の内容「文字を用いることの必要性と意味」の冒頭に、方程式の未知数を表すχではなく、自然数を表すｎが登場するのか。「解説」では、この後に１元１次方程式ａχ＋ｂ＝０の移項による解法が説明されている。

② 「マッチ棒の問題」の求め方の違いとして、４ｎ－（ｎ－１）と２ｎ＋（ｎ＋１）が例としてあげられている。また、これを「文字を用いることのよさ」としている。なぜこの二つが一意的に３ｎ＋１と表わされることを確認しないのか。

③ 文科省の「指導要領」や「解説」にしばしば登場する「数学のよさ」「文字を用いることのよさ」の中の「よさ」とは何を指しているのか。

【マッチ棒の問題】

マッチ棒を隙間なく縦と横に並べて、正方形を横方向にｎ個つくるのに最低必要なマッチ棒の本数を求めよ。

上記の３点について、レポートでは次のように指摘した。

【①について】　１年生のカリキュラムの設計上の問題として、最初の文字ｎが整数論としてでてくる。ここで自然数や素数、約数、素因数分解などの用語が定義されている。したがって最初に習う文字がｎになっている。筆者の意見として、文字式は方程式から始める方がよいと思う。その理由は、方程式では文字としてａ，ｂ，χ，ｙなどを使うが、これらは実数として扱われており（中学校の段階では実数はまだ定義されていない）、加減乗除が自由にできる（代数学的には実数の集合は体となる）からである。例えばｎが自然数だと、３ｎ＋１＝８はｎ＝７／３とすることができない。

【②について】　一般的には「マッチ棒の問題」は数列の問題である。マッチ棒の本数ａ（ｎ）は数列の一般項としてａ（ｎ）＝３ｎ＋１と一意的に決まることが大切なのである。高校教員だった筆者の感覚では、生徒たちにとって数列は１次方程式に比べるとはるかに難しい。その理由は、１次方程式の文字 χ はある値ａをとるが、数列にでてくる文字ｎは、すべての自然数ｎを意味するからである。背景には数学的帰納法の概念がある。

【③について】　そもそも「よさ」とは倫理的、相対的な価値判断である。数学に「良さ」があるとすれば、当然「悪さ」もあるのである。「解説」では「数学のよさ」を次のように説明している。

*

また「数学のよさ」とは、数学的な表現や処理のよさや、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則のよさ、数学の実用性などを意味する。このような「数学的活動の楽しさ」や「数学のよさ」に気付くことで数学学習への関心・意欲が高まり、数学的活動に積極的に取り組もうとする態度が養われていく。(P.64).

*

上の文章を何度読んでみても、「よさ」が何なのかということが全くわからない。そも

そも「よさ」を定義する文章のなかに「よさ」が出てきて、数学的な文章としては失格である。「解説」の執筆者の中に数学者も含まれていると思うが、まるで気がついていないようである 。数学者の野崎昭弘氏(2025.1.15 に亡くなられた)は、「数学のよさ」について次のように書かれている。

*

私が理学部数学科で鍛えられ、あとで研究者としてコンピュータの世界に進出して、本当に「よかった」と思ったのは学んだ〈数学の〉理論や定理よりも「問題や条件・方法・概念などを、＜数学の＞言葉で正確に表現する力であった」

（注）＜＞内は筆者による。野崎昭弘「御万人(うまんちゅう)の数学」

『数教協ゼミナール 57』(2003).p.3-4.

*

近ごろは何でも「タイパ(時間短縮)」がもてはやされている。何事も短時間で解決することが求められている。例えば、スマホや生成ＡＩを使ってスマートに暮らすことが「よりよい」とされている。しかし、「数学」を学ぶにはできるだけ時間を使いゆっくりと学ぶ方が、結局は近道だと思うようになった。「なぜこの言葉や概念を必要とするのか」ということを納得するまで「諦めない」ことが大切である。そのうち「数学」の方から、その人に優しく近づいて来てくれるものだと思う。

## ４．積分導入方法の比較　　　　成田收

「高校生に積分をどのように導入すればいいのか」について考察した、たいへん貴重なレポートである。最初に、微分積分の歴史について草創期から現代の無限小解析までのまとめがある。目次は次のようになっている。

項目ごとに、おおまかにまとめると次のようになる。

⑴ 微分積分の草創期

ニュートンやライプニッツによって始められた微分は、関数$y=f(\chi)$における微小変化$d\chi$, $dy$を無限に小さいものとして、$(d\chi)^2$以上の項を無視するという数学的には厳密でないものであった。始めは$d\chi$ を０でないものとしながら、後に０としてあつかうという矛盾をかかえており、これがとくに攻撃の対象となった。

積分の方は微小変化$dy$を集めたものが元の$y$となる、すなわち、

$$y=\int dy=\int (dy/d\chi)\,d\chi$$

とするたいへん大らかなものであった。 また$f(\chi)d\chi$は関数値に$d\chi$をかけたもので、これを集めた$\int f(\chi)d\chi$ は面積を表すことも明らかであった。

⑵ コーシーによる厳密化

コーシーはこの矛盾を回避するために極限の概念を導入した。初めに有限の増分 $\Delta\chi$, $\Delta y$を考え、これらの比 $\Delta y/\Delta\chi$ の極限を関数$f(\chi)$の微分$dy/d\chi$ と定義したのである。したがって、単独では$d\chi$, $dy$は意味のないものであり、積分には別の定義をする必要が生じた。

コーシーは積分には面積の意味をもたせることにした。すなわち、曲線$y=f(y)$, $\chi$ 軸, 直線 $\chi=a$, $\chi=b$で囲まれる図形の符号つき面積を区間$[a, b]$における$f(\chi)$の定積分と定義した。そのために区間を分割し、面積を各長方形の和の極限で定義した。この方法は今日ではリーマン和の極限と呼ばれている。微分と積分を独立に定義したため、微分と積分の逆演算性は証明が必要な定理となった。これが、微分積分学の基本定理である。

⑶ 高校教科書の積分の導入

高校教科書は基本定理の証明を避けるため、上の①と②の中間を縫うようにして議論を展開する。まず関数$f(\chi)$の原始関数$F(\chi)$の１つを不定積分と呼ぶ。それらの差$F(b)-F(a)$を、$a$から$b$までの$f(\chi)$の定積分と名づける。結局、積分の本質は逆微分ということになる。これでは積分の本質を伝えることはできない。

一方で面積と定積分の関係は、面積関数$s(a, b)$を天与のものとし、$S(\chi)=s(a, \chi)$を $\chi$ で微分すると$S'(\chi)=f(\chi)$となることを証明する。つまり$S(\chi)$は$f(\chi)$の原始関数の一つだと結論する。これでは、生徒たちに定積分とは面積のことだという感覚は生まれない。これを批判して、微分積分を積分から始めることにして、積分はリーマン和の極限で教えようというのが次の氏家プランである。

⑷ 積分を先に学ぶ氏家プラン

氏家プランでは歴史的順序にしたがって、まず積分を先に学習し、後に微分を学ぶ。その

統一として微分積分学の基本定理を学び、劇的に面積計算が楽になることを知ろうという順序になっている。一見関係のなさそうな微分と積分が逆演算であることを、最期に基本定理として学ぶという氏家プランは、積分の概念形成がしっかりなされるという意味でも優れている。さらに氏家さんは、リーマン和の極限をとるところで無限小の概念「20 世紀の無限小解析(キースラー)」を使っている。

(5) 現代における無限小解析

1960 年代に A.ロビンソンによって復活した無限小解析(超準解析とも呼ばれる)は、これまで多くの数学者、自然哲学者たちの批判の的となっていた「無限大」や「無限小」を矛盾なく定義して数学的な基礎を与えた。無限小の世界に入って、関数の変化を見ることが微分であり、無限小を非可算無限個集めたものが積分である。また関数ｆ(χ)における無限小面積ｄｓ＝ｆ(χ)ｄχ を積分すると、面積ｓとなることも明らかとなる。

キースラーの『無限小解析の基礎』の構成は日本の高校教科書に近く、せっかく無限小が復活したにも関わらず、微積分学の草創期のおおらかさが欠けている。そこで成田さんは、氏家さんのプランも参考にした積分導入のプランを提示している（詳しい内容はレポートを参照)。

(6) 『解析概論』の積分論

日本が生んだ最初の世界的な数学者・高木貞二は、近代整数論の代表的理論を建設したが、日本の数学教育に多大な功績を残した人でもある。彼の東大での講義録をまとめた『解析概論』は 1938 年が初版であり、現在でも書店で手に入るベストセラーである。成田さんは次のように述べている。

「積分の導入ではじめにアルキメデスの取り尽くし法を紹介しているが、その直後に現在の高校数学Ⅱの積分法の導入と同じ方法を紹介している。(中略) しかしすぐに、任意の関数が原始関数をもつかどうかは明らかではなく、原始関数を求めることが困難な場合が多々あることを示し、その場合には面積とは何であろうかと、疑問を投げかけている。その後、面積をリーマン和の極限で定義しこれを定積分と名づけている。また連続関数には原始関数が存在することも厳密に示している。つまり、積分によって面積を定義し直していると言っていると思われる。また、この部分で連続関数には原始関数が存在することも厳密に示している。つまり、ある連続関数の原始関数が見つからなくても、積分した関数が原始関数になっているので、安心して面積を考えることができると言っている。現在の高校の教科書はこの部分が欠けていると思われる。その点、氏家プランは最初からリーマン和の極限で積分を定義しているため、『解析概論』の方式に近い厳密さがある。」

成田さんのレポートの後半に『解析概論』の積分論についての詳しい考察があるが、ここでは省略する。

筆者の経験では、多くの高校教師は教科書の積分の記述について何も疑問を持っていないように思われる。筆者の奥さんはある地方都市の進学校出身（理系）である。彼女は「微分は理解できたが、積分はまるで分らなかった」とよく言っている。あるとき、同級生の男子が思い切って「先生の説明がよく分かりません」と質問した。すると担当の数学教師は「分からなくていいんだ！」とそっけなく返したそうである。もしかすると、その教師も教科書の積分の記述に不満を感じていたのかも知れない。

## ５．バカロレア 2024 年問題を見る　　渡邊勝

渡邊勝さんのフランスの国立大学入学試験「バカロレア」の研究は 10 数年におよんでいる。毎年６月に行われる試験の数学問題を翻訳・分析して紹介している。また、年ごとの問題の特色、日本とフランスの高校のカリキュラムとの違い、学校文化や数学文化の違いについても報告している。たいへん貴重な数学教育の研究である。

３年ほど前に、バカロレアの合格率があまりにも低いことなどが問題となり大改革が行われ、問題もかなり易しくなった。また合格率も 70%を超えたということである。それにもかかわらず、解析学における極限や微分などの諸概念や、確率・統計学における数理科学的思考を問う問題なども出題されている。

最近、日本からのフィールズ賞受賞者が出ていないなかで、堅実に受賞者を出しているフランスの数学に対する姿勢が現れているように思える。最近のフィールズ賞受賞者数については最後に触れる。

今年は次の４分野から出題された。試験時間は全部で４時間である。[問題１]のみ解答をつける。

[問題１]　解析分野；各命題の真偽を問う単問．証明のない解答は０点.

１. 実数Ｒ上で定義された 関数 $f(\chi)=5\chi e^{-\chi}$について

命題１．関数 f のグラフは$\chi\to+\infty$で$\chi$軸に漸近的に近づく.　（真）

命題２．関数 f は微分方程式； $y'+y=5e^{-\chi}$の解である.　（真）

２．次の３つの数列について，すべての自然数 n に対して次の関係がある.

$$u_n\leqq v_n\leqq w_n$$

さらに，数列 $u_n$はー１，数列 $w_n$は１に収束する.

命題３．数列 $v_n$は、区間[－１，１]に属するある実数 ℓ に収束する.

数列 $u_n$は単調増加し、数列 $w_n$は単調減少している。　（偽）

命題４．すべての自然数 n に対して， $u_0\leqq v_n\leqq w_0$である.　（真）

[問題２]　確率・統計分野；数理科学的な非等確率の問題．日本ではほとんど見かけないチェビシェフの不等式（注）を使う.

各店舗(インターネット, 家電チェーン, スーパーマーケット)の顧客満足度について,
加重的確率を計算する問題である.

（注） チェビシェフの不等式とは、確率変数 X で表される確率分布 P が次の不等式で与えられることである。ここで、$\mu$ は平均値、$\sigma^2$ は分散、$\kappa$ は任意の値を表す。

$$P(|X-\mu| \geqq \kappa\sigma) \leqq 1/\kappa^2.$$

チェビシェフの不等式はどのような確率分布においてもなりたつ。

［問題３］ 幾何分野；空間図形を扱っている。 最後は４面体の高さを問う. ユークリッド幾何を使わないで、３次元空間内の直線や平面の方程式、パラメータ表示、３次元ベクトルなどを総合的に使う問題。図があるので直感的に分かりやすいが、３次元の幾何学のとり扱いに慣れてないと苦労する。

［問題４］ 解析分野；A, B, C の三部に分かれ、複雑で総合的な構成になっている。最後は２曲線の間に挟まれた図形の面積を問う. （ただし $\ln\chi = \log_e\chi$ は自然対数関数）

（A部） 開区間（0, ＋∞）で定義された次の関数 f に関する問題。

$$f(\chi) = \chi - 2 + 1/2 \cdot \ln\chi.$$

（B部） 区間（0, 1］で定義された次の関数 g に関する問題。

$$g(\chi) = -7/8 \cdot \chi^2 + \chi - 1/4 \cdot \chi^2 \ln\chi.$$

（B部） 区間（0, 1］で定義された放物線； $y = -7/8 \cdot \chi^2 + \chi$ および、関数 g のグラフ、および２直線 $\chi = 1/\alpha$, $\chi = 1$ によって囲まれた領域の面積を問う問題。ただし上の $\alpha$ は $f(\chi) = 0$ 唯一の解。

参考に 1936 年-2022 年のフィールズ賞受賞者の国別人数をあげる(wikipedia による)。国籍の問題などもあり、人数がそのまま国の数学力を表しているわけではない。2022 年には２人目の女性数学者であるマリナ・ヴィアゾフスカ(ウクライナ出身)が受賞した。ドイツが２人というのは少し意外な感じがする。最近では、アジアや南米など受賞者の地域も広がっている。

アメリカ（14 人）, フランス（14 人）, ロシア・ソヴィエト（9 人）, イギリス（9 人）, 日本（3 人）の順になっている. ２人の国は次の６か国である。

ドイツ, イタリア, オーストラリア, ベルギー, イラン, ウクライナ.